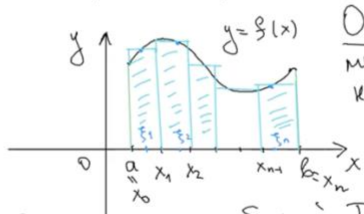


<u>Опр. 1</u> Разбиением (неразмеченным) отрезка $[a,b]$ наз-ся мн-во $T=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$.

<u>Объединением</u> разбиений T_1 и T_2 наз-ся разбиение T, т.ч. $T=T_1 \vee T_2$. Разбиение T' наз-ся <u>измельчением</u> разбиения T, если $T \subset T'$.

<u>Опр. 5</u> Число I наз-ся <u>определенным интегралом</u> (Римана) от ф-ции f на отрезке $[a,b]$, если $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta(\varepsilon)>0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения, $\Delta_V<\delta$: $|\sigma_f(V)-I|<\varepsilon$ $\quad I=\lim\limits_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)$
(то есть говорят, что I есть предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю).
Если такое число I сущ-т, то говорят, что f <u>интегрируема</u> (по Риману) на $[a,b]$. Пишут: $f\in R[a,b]$. Обозн-е: $I=\int_a^b f(x)\,dx$. ОН ЕДИНСТВ.
a - нижний предел интегрирования; b - верхний предел.

<u>Лемма 2</u> $S(T)=\sup\limits_{V=V(T)}\{\sigma(V)\}$; $s(T)=\inf\limits_{V=V(T)}\{\sigma(V)\}$, где точные грани берутся по всем размеч-м разб-ям V, соотв-м неразмеч-му разб-ю T.

<u>Д-во</u>: проведем для $S(T)$. Из л. 1 $\Rightarrow$ $\sigma(V)\le S(T)$ $\forall V=V(T)$.

$M_k=\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists \xi_k\in[x_{k-1},x_k]$: $f(\xi_k)>M_k-\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Тогда $V=\{T;\xi_1,\dots,\xi_n\} \Rightarrow \sigma(V)=\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot\Delta x_k >$
$>\sum\limits_{k=1}^n\left(M_k-\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_k = S(T)-\frac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{\sum\limits_{k=1}^n\Delta x_k}_{=b-a} = S(T)-\varepsilon$. ч.т.д.

<u>Опр. 1</u> Пусть функция f ограничена на $[a,b]$.
$I^*=\inf\limits_T\{S(T)\}$ - <u>верхний интеграл Дарбу</u>;
$I_*=\sup\limits_T\{s(T)\}$ - <u>нижний интеграл Дарбу</u>, где точные грани берутся по всем разбиениям T отрезка $[a,b]$.

<u>Лемма 5</u>. $\forall$ ограниченной ф-ции I^* и I_* сущ-т, причем $I_*\le I^*$.

<u>Д-во</u>: $S(T)=\sum\limits_{k=1}^n M_k\Delta x_k \geq m\sum\limits_{k=1}^n\Delta x_k=m(b-a) \Rightarrow$
$M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$; $M_k \geq m_k\geq m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$

мн-во $\{S(T)\}$ огр. снизу $\Rightarrow \exists \inf\{S(T)\}=I^*$
Сущ-е I_* - аналогично.
Док-м, что $I_*\le I^*$. Предположим, что $I_*>I^*$.
Обозначим $\varepsilon=\frac{I_*-I^*}{2}>0$. $I^*=\inf\{S(T)\} \Rightarrow$
$\exists T_1$ - разб-е $[a,b]$, т.ч. $0\le S(T_1)-I^*<\varepsilon$
$\Rightarrow S(T_1)<I^*+\varepsilon=I^*+\frac{I_*-I^*}{2}=\frac{I_*+I^*}{2}$.
Аналогично $\exists T_2$: $s(T_2)>I_*-\varepsilon=\frac{I_*+I^*}{2}$.
Значит, $s(T_2)>S(T_1)$?! лемме 4. Значит, $I_*\le I^*$. ч.т.д.

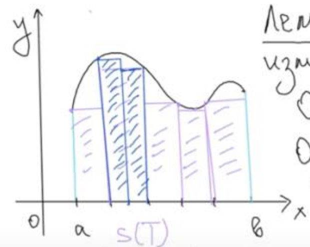
<u>Опр. 2</u> Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\dots,n$.
<u>Число</u> $\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}=\Delta_T$ наз-ся <u>диаметром</u> разбиения T.

<u>Опр. 3</u> Пусть $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,n$. Совокупность $V=\{x_0,x_1,\dots,x_n;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ наз-ся <u>размеченным разбиением</u>, соотв-м неразмеченному разб-ю T.
Пишут: $V=V(T)$. Считается, что $\Delta_V=\Delta_T$, где $V=V(T)$.

<u>Опр. 4</u> Пусть ф-ция f определена на $[a,b]$. Выраж-е $\sigma_f(V)=\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ наз-ся <u>интегральной суммой</u> для f, соотв-й размеч. разб-ю V.

<u>Опр. 6</u> <u>Верхней</u> (<u>нижней</u>) <u>суммой Дарбу</u> ф-ции f на $[a,b]$, соотв-й разбиению T, наз-ся
$$S(T)=\sum_{k=1}^n M_k\cdot\Delta x_k \quad \left(s(T)=\sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k\right).$$

<u>Лемма 1</u>. $\forall T$ - разб-я $[a,b]$, $\forall V=V(T)$:
$$s(T)\le\sigma(V)\le S(T)$$
Д-во: $m_k\le f(\xi_k)\le M_k \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^n m_k\Delta x_k\le\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\le\sum\limits_{k=1}^n M_k\Delta x_k$ ч.т.д.



<u>Лемма 3</u>. Пусть $T'=T\vee\{x_1',\dots,x_l'\}$ - измельчение разб-я T. Тогда
$0\le S(T)-S(T')\le l\cdot(M-m)\cdot\Delta_T$,
$0\le s(T')-s(T)\le l\cdot(M-m)\cdot\Delta_T$.

<u>Д-во</u>: Док-м 1-е утв-е.
Пусть $T'=T\vee\{x'\}$, $x_{k-1}<x'<x_k$
Тогда $S(T)-S(T')=M_k\Delta x_k-\Big(\underbrace{\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x'} f(x)}_{=M_k'\ \le M_k}\cdot(x'-x_{k-1})+$
$+\underbrace{\sup\limits_{x'\le x\le x_k} f(x)}_{=M_k''\ \le M_k}\cdot(x_k-x')\Big)\geq M_k\cdot\Delta x_k-M_k\underbrace{(x'-x_{k-1}+x_k-x')}_{\Delta x_k}=0$
на всех отрезках, кроме k-го, все взаимно уничтож-сь

С др. стороны, $S(T)-S(T')=\underset{\le M}{M_k}\Delta x_k-$
$-\big(\underset{\ge m}{M_k'}(x'-x_{k-1})+\underset{\ge m}{M_k''}(x_k-x')\big)\le M\cdot\Delta x_k-m\cdot\Delta x_k\le$
$\le(M-m)\cdot\Delta_T$. ч.т.д.
$\Rightarrow$ при добавл-и l точек: $(M-m)\cdot\Delta_T\cdot l$

<u>Лемма 4</u>. $\forall T_1, T_2$ - разбиений $[a,b]$:
$$s(T_1)\le S(T_2)$$
<u>Д-во</u>: Обозначим $T=T_1\vee T_2$. Тогда T - измельч-е для T_1 и T_2 $\Rightarrow s(T_1)\underset{\text{л.3}}{\le}s(T)\underset{\text{опр-е}}{\le}S(T)\underset{\text{л.3}}{\le}S(T_2)$. ч.т.д.

<u>Лемма 6</u> (основная лемма Дарбу).
$I^*=\lim\limits_{\Delta_T\to 0}S(T)$; $I_*=\lim\limits_{\Delta_T\to 0}s(T)$, то есть
$\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta(\varepsilon)>0$, т.ч. $\forall T$ - разбиения $[a,b]$, $\Delta_T<\delta$: $|S(T)-I^*|<\varepsilon \Leftrightarrow 0\le S(T)-I^*<\varepsilon$
$(|I_*-s(T)|<\varepsilon)$.

<u>Д-во</u>: Заметим, что если $m=M$, то f постоянна на $[a,b] \Rightarrow \forall T$: $S(T)=s(T)=M\cdot(b-a)=I^*=I_*$.
Пусть $m<M$. Док-м первое утв-е, второе аналогично.

Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists T^*=\{x_0^*, x_1^*,\dots,x_k^*\}$ - разбиение, т.ч. $0\le S(T^*)-I^*<\varepsilon/2$. $\Rightarrow S(T^*)<I^*+\frac{\varepsilon}{2}$ - по опр-ю inf
$x_0^* = a$, $x_k^* = b$; $I^* = \inf\{S(T)\}$
Положим $\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$ (заметим, что $\delta=\delta(\varepsilon)$).
Пусть T - произвольное разбиение $[a,b]$, $\Delta_T<\delta$.
Обозначим $T'=T\cup T^*$. T' - измельчение для T
$\Rightarrow$ (лемма 3) $0\le S(T)-S(T')\le(M-m)\cdot\Delta_T\cdot(k-1)<$
$<(M-m)\cdot\delta\cdot(k-1)=\varepsilon/2$. Следовательно, $S(T^*)-I^*<\varepsilon/2$
$0\le S(T)-I^*=\underbrace{S(T)-S(T')}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{\underset{\le S(T^*)}{S(T')}-I^*}_{}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
ч.т.д.